

Задачи к зачету по курсу
"Теория случайных процессов"

1. Для случайного процесса с независимыми и однородными по времени приращениями вычислить математическое ожидание, дисперсию и корреляционную функцию.

2. Случайный процесс $\xi(t) = A \cos(\omega t + \varphi)$, где ω - неслучайная константа, A и φ независимы, $\mathbf{M}(A) = m$, $\mathbf{D}(A) = \sigma^2$, φ -равномерно распределена на отрезке $[0, \pi]$. Вычислить математическое ожидание, дисперсию и корреляционную функцию для $\xi(t)$. Доказать, что это стационарный в широком смысле случайный процесс.

3. Пусть $W(t)$ -стандартный винеровский процесс. Доказать, что он непрерывен в среднем квадратическом, но не является дифференцируемым в среднем квадратическом.

4. $\xi(t)$ -пуассоновский процесс, $\eta(t) = \int_0^t \xi(s) ds$. Вычислить математическое ожидание, дисперсию и корреляционную функцию для $\eta(t)$.

5. Пусть $W(t)$ -стандартный винеровский процесс. $\xi_1 = \int_0^\pi \cos(t) dW(t)$, $\xi_2 = \int_0^\pi \sin(t) dW(t)$. Найти: $M(\xi_1)$, $M(\xi_2)$, $D(\xi_1)$, $D(\xi_2)$, $Cov(\xi_1, \xi_2)$.

6. Пусть $W(t)$ -стандартный винеровский процесс, $h(\tau) = \exp(-\tau)$, $\tau > 0$, $\xi(t) = \int_{-\infty}^t h(t-s) W(s) ds$. Вычислить математическое ожидание, дисперсию и корреляционную функцию для такого процесса. То же самое для процесса $\eta(t) = \int_{-\infty}^t h(t-s) dW(s)$.

7. Найти наилучшую линейную оценку для случайной величины η в пространстве случайных величин $L = \{\alpha_1 \xi_1 + \alpha_2 \xi_2\}$, где ξ_1 и ξ_2 - фиксированные случайные величины, $\alpha_1, \alpha_2 \in R^1$. $M(\xi_1) = M(\xi_2) = M(\eta) = 0$. $D(\xi_1) = D(\eta) = 1$, $D(\xi_2) = 4$, $Cov(\xi_1, \xi_2) = -1$, $Cov(\xi_1, \eta) = 0.5$, $Cov(\xi_2, \eta) = 1$.

8. Стационарная последовательность $\xi(n)$ имеет спектральную плотность $f(\lambda) = 10 + 6 \cos \lambda = |3 + e^{-i\lambda}|^2$. По наблюдениям $\xi(n)$, $n \leq 0$, найти оптимальный линейный прогноз на один шаг вперед.

9. Случайный процесс $\xi(t)$ удовлетворяет стохастическому дифференциальному уравнению

$$d\xi(t) = e^{-t} \xi(t) dt + d\eta(t), \quad t \geq 0.$$

Найти общий вид решения этого уравнения.

10. Случайный процесс $\xi(t)$ имеет стохастический дифференциал вида

$$d\xi(t) = \theta(t)dt + d\eta(t), \quad t \geq 0,$$

где $\theta(t) = \alpha_1 \cos(t) + \alpha_2 \sin(t)$. Написать, как выглядят оптимальные линейные оценки для α_1 и α_2 .

11. При движении по некоторому лабиринту Вы в первый раз равновероятно сворачиваете либо налево, либо направо. Далее на каждой развилке Вы с вероятностью 0.7 сворачиваете туда же, что и в предыдущий раз, а с вероятностью 0.3 в противоположную сторону. Какова вероятность того, что вы свернете налево

- а) на третьей развилке,
- б) на 1000-ой развилке?

12. Пусть цепь Маркова с непрерывным временем имеет два состояния и следующую матрицу интенсивностей перехода

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$$

Используя уравнения Колмогорова, найти вероятности перехода $P_{ij}(t), t \geq 0$.